УДК 517.9

В. Г. Пименов

ЗАДАЧИ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ*

1. Формализация позиционных задач в классе обобщенных управлений с последействием

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t), u(t-\tau)) + f_2(t, x(t), v(t)). \tag{1.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; u и v — управления, стесненные ограничениями $u \in P$, $v \in Q$; P и Q — компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно; $t \in [t_0, \theta]$; $\tau > 0$ — постоянная величина запаздывания; функции $f_1(t, x, u, w)$ и $f_2(t, x, v)$ определены соответственно на $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times P$ и $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times Q$, причем в области определения они непрерывны по совокупности переменных, локально липшицевы по x и удовлетворяют условию равномерной продолжимости $|f(t, x, u, v)| \leq \kappa(1 + |x|)$.

Основу задач теории позиционного управления системами составляет формализация в виде дифференциальных игр сближения — уклонения, а основной результат этой теории — теорема об альтернативе, полученная Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным и изложенная в монографии [3] для систем без эффекта запаздывания. Альтернатива для систем с эффектом последействия в фазовых координатах получена Ю. С. Осиповым [4]. Для систем вида (1.1) с эффектом последействия в управляющих параметрах в работах [5, 6] изучены задачи сближения и уклонения фазового вектора $x(t)$ системы и предыстории управления — функции $u_t(\cdot) = \{u_t(s) = u(t+s),\ -\tau \leq s < 0\}$ — с некоторым целевым множеством к моменту θ. При этом целевое множество выбирается в функциональном пространстве позиций системы (1.1) — троек $\{t, x, u_t(\cdot)\}$. Решение этих задач получены в виде экстремальных стратегий к стабильным множествам (или к последовательности вложенных стабильных множеств). Наличие запаздывания в управлении создает дополнительные трудности в формализации понятий

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №98-01-00363).

движений, максимального стабильного множества и наделяет систему новыми эффектами [6]. Это связано в основном с некомпактностью множества управлений $u(t)$ и, как следствие, с некомпактностью пучка движений системы (1.1) в функциональном пространстве позиций. Расширение понятия управлений согласно схеме работ [7, 8] позволяет вводить не только аппроксимационные движения, но и предельные движения системы (1.1), избежать процедуры прицеливания на последовательность стабильных множеств.

Обобщенным управлением будем называть слабо измеримую на $[t_0, \theta]$ функцию $\mu(t)$ со значениями во множестве вероятностных мер Радона на $(P \times P)$ [1, 2], удовлетворяющую условию сопряжения по запаздыванию [7]. Для удобства чтения данной работы приведем это условие.

Рассмотрим $rpm(P \times P)$ — множество вероятностных мер Радона, сосредоточенных на декартовом произведении $P \times P$. Проекциями меры $\mu \in rpm(P \times P)$ назовем меры $\nu^\mu \in rpm(P)$ и $\eta^\mu \in rpm(P)$, определенные на σ-алгебре Σ борелевских множеств B из $\mathbb{R}^m$ следующим образом: $\nu^\mu(B) = \mu(B \times P)$, $\eta^\mu(B) = \mu(P \times B)$.

Пусть $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$ — множество всех слабо измеримых по t функций $\mu(t)$, значениями которых являются меры из $rpm(P \times P)$. Тогда всякая $\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$ индуцирует пару функций $\nu^\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P))$ и $\eta^\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P))$, значения которых при всех $t \in [t_0, \theta]$ являются соответствующими проекциями функции $\mu(\cdot)$.

Среди множества $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$ выделим подмножество функций $\mu(t)$ (*обобщенных управлений*), сопряженных по запаздыванию τ

$$\text{при почти всех } t \in [t_0 + \tau, \theta] \quad \nu^\mu(t - \tau) = \eta^\mu(t).$$

Примером функций $\mu(t)$ из $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$, для которых выполнено условие сопряжения по запаздыванию, являются функции, представимые в виде

$$\mu(t) = \nu(t) \times \nu(t - \tau), \ t \in [t_0, \theta], \ \nu(\cdot) \in U([t_0 - \tau, \theta], rpm(P)).$$

Например, если $\nu(t)$ при всех t — сосредоточенная мера, т.е. $\nu(t) = \delta(u(t))$, где $u(t)$ (обычное управление) — измеримая на $[t_0 - \tau, \theta]$ функция со значениями в компакте P, то действие обобщенного управления $\mu(t) = \delta(u(t)) \times \delta(u(t - \tau))$ на систему (1.1) эквивалентно действию обычного управления. Однако, как показано в [7], в некоторых задачах оптимального управления системами с эффектом последействия оптимальный результат достигается путем действия обобщенных управлений, не представимых в виде произведения функций-мер. Например, обобщенное управление $\mu(t)$ со значениями в $rpm(P \times P)$, где компакт P представляет собой отрезок $[-1, 1]$, вида

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(-1, -1) + \frac{1}{2}\delta(1, 1)$$

удовлетворяет условию сопряжения по запаздыванию, но непредставимо в виде произведения мер.

В соответствии с обозначениями работы [8] множество обобщенных управлений будем обозначать $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^\tau$. Обобщенное управление заменит в системе (1.1) обычное управление $u(t)$ — измеримую на $[t_0, \theta]$ функцию со значениями в P. Множество обычных управлений будем обозначать $U([t_0, \theta], P)$. Отметим, что будем ограничиваться обычным определением управления $v(\cdot) \in U([t_0, \theta], Q)$, так как система (1.1) не содержит запаздывания в этом управлении, трактуемом обычно как помеха.

Введенная в работах [7, 8] топология слабой сходимости на множестве обобщенных управлений может быть индуцирована введением слабой нормы на множестве $N \supset U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^\tau$ слабо измеримых на $[t_0, \theta]$ функций со значениями во множестве $frm(P \times P)$ мер Радона [2, с.65] на $P \times P$ следующим образом. По теореме Данфорда–Петтиса [2, с.299] пространство N изоморфно сопряженному к пространству $B = L_1([t_0, \theta], C(P \times P))$ функций $\varphi(t, u, w)$ интегрируемых по t, непрерывных по u и v. Так как пространство B сепарабельно, то выберем в нем счетное всюду плотное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ и положим [2, с.303]

$$\|\mu\|_w = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\int_{t_0}^{\theta} \int_P \int_P \varphi_j(t, u, w)\mu(t)(du, dv)dt| / (1 + \|\varphi_j\|_B),$$

где

$$\|\varphi_j\|_B = \int_{t_0}^{\theta} \max_{u \in P, w \in P} |\varphi(t, u, w)| dt.$$

Начальной (обобщенной) предысторией управления назовем слабо измеримую на $[-\tau, 0)$ функцию $\nu(s)$ со значениями во множестве вероятностных мер Радона на (P). Множество начальных обобщенных предысторий управлений будем обозначать $U([-\tau, 0), rpm(P))$. Топологию слабой сходимости на этом множестве можно индуцировать введением слабой нормы

$$\|\nu\|_w = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\int_{-\tau}^{0} \int_P \varphi_j^0(s, u)\nu(s)(du)ds| / (1 + \|\varphi_j^0\|_{B^0}),$$

где $\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, ...\}$ — счетное всюду плотное множество в пространстве $B^0 = L_1([-\tau, 0), C(P))$ с нормой

$$\|\varphi_j\|_{B^0} = \int_{-\tau}^{0} \max_{u \in P} |\varphi(t, u)| ds.$$

Обобщенным управлением, сопряженным с начальной предысторией $\nu(s)$, назовем обобщенное управление $\mu(t)$, удовлетворяющее условию

$$\text{при почти всех } t \in [t_0, t_0+\tau] \ \ \eta^{\mu}(t) = \nu(t - t_0 - \tau).$$

Это множество будем обозначать $U([t_0,\theta], rpm(P\times P))^{\tau,\nu}$.

Обозначим через $U([t_0,\theta], rpm(P\times P))^{\tau,\{\nu\}}$ множество обобщенных управлений $\mu(\cdot)$ таких, что найдется такая начальная предыстория $\nu(\cdot) \in U([-\tau, 0), rpm(P))$, что $\mu(\cdot) \in U([t_0,\theta], rpm(P\times P))^{\tau,\nu}$. В силу леммы 1 работы [7] и слабой компактности множества $U([-\tau,0), rpm(P))$ множество $U([t_0,\theta], rpm(P\times P))^{\tau,\{\nu\}}$ слабо компактно.

Обобщенной предысторией управления к моменту $t \in [t_0,\theta]$ назовем всякую функцию $\mu(\cdot) = \{\mu_t(s), -\tau \le s < 0\} \in U([-\tau,0], rpm(P\times P))$ такую, что найдутся такие обобщенная начальная предыстория $\nu(\cdot) \in U([-\tau, 0), rpm(P))$ и сопряженное с $\nu(\cdot)$ обобщенное управление $\hat\mu(\cdot) \in U([t_0,\theta], rpm(P\times P))^{\tau,\nu}$, что

а) при $t \in [t_0, t_0+\tau]$ выполняется $\nu^{\mu}_{t+s} = \nu(t+s-t_0)$ при почти всех $s \in [-\tau, t_0 - t)$;

б) $\mu_t(s) = \hat\mu(t+s)$ при почти всех $s \in [\max\{-\tau, t_0 - t\}, 0)$.

Множество обобщенных предысторий к моменту t будем обозначать Π_t, множество обобщенных предысторий к моменту t, сопряженных с фиксированной начальной предысторией $\nu_0(\cdot)$, будем обозначать Π^0_t. В силу леммы 1 работы [7] множество Π_t компактно в топологии слабой нормы, определяемой при $t > t_0+\tau$ равенством

$$\|\mu_t(\cdot)\|_w = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \Big| \int_{t-\tau}^{t} \int_P \int_P \varphi_j(\xi,u,w)\mu(\xi)(du,dv)d\xi \Big| / (1 + \|\varphi_j\|_B),$$

а при $t < t_0$ — равенством

$$\|\mu_t(\cdot)\|_w = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} | \int_{t_0}^{t} \int_P \int_P \varphi_j(\xi,u,w)\mu(\xi)(du,dv)d\xi | / (1 + \|\varphi_j\|_B) +$$
$$+ \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} | \int_{t-t_0-\tau}^{0} \int_P \varphi^0_j(s,u)\nu(s)(du)ds | / (1 + \|\varphi^0_j\|_{B^0}).$$

Обобщенной позицией системы (1.1) назовем тройку $\{t, x, \mu_t(\cdot)\}$, где $t \in [t_0,\theta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu_t(\cdot) \in \Pi_t$. Множество всех обобщенных позиций будем обозначать ρ. Срезки множества обобщенных позиций по t будем обозначать $\rho_t = \{(x, \mu_t(\cdot)) : \{t, x, \mu_t(\cdot)\} \in \rho\}$, срезки по t и $\mu_t(\cdot)$ будем обозначать $\rho_{t,\mu_t(\cdot)} = \{x : \{t, x, \mu_t(\cdot)\} \in \rho\}$. Аналогичные обозначения будем применять для срезок других множеств из пространства обобщенных позиций.

Будем говорить, что $M \subset \rho(t,x,\mu)$-замкнуто (или просто замкнуто), если оно замкнуто в топологии, индуцированной нормой $\|\{t,x,\mu_t(\cdot)\}\|^2 =$

$t^2 + \|x\|^2 + \|\mu_t(\cdot)\|_w^2$. Будем говорить, что $M \subset \rho(x,\mu)$-замкнуто, если все его сечения M_t замкнуты в топологии, индуцированной нормой $\|(x,\mu_t(\cdot))\|^2 = \|x\|^2 + \|\mu_t(\cdot)\|_w^2$. Будем говорить, что $M \subset \rho x$-замкнуто, если все его сечения $M_{t,\mu_t(\cdot)}$ замкнуты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем обозначать через $[M]$ x-замыкание множества M; через M^ε — совокупность позиций $\{t, x, \mu_t(\cdot)\}$ таких, что $x \in M^\varepsilon_{t,\mu_t(\cdot)}$, где через A^ε обозначается ε-окрестность множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Обобщенной стратегией U назовем отображение, ставящее обобщенной позиции $p_* = \{t_*, x_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)\}$ системы (1.1) и числу $t^* \in (t_*, \theta]$ в соответствие функцию $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\mu^*}$, т.е. обобщенное управление, определенное на $[t_*, t^*)$ и сопряженное с обобщенной предысторией $\mu^*_{t_*}$:

$$\text{при почти всех } t \in [t_*, \min\{t_* + \tau, t^*\}] \quad \eta^\mu(t) = \nu^{\mu^*}(t - \tau).$$

Обобщенной стратегией V назовем отображение, ставящее обобщенной позиции $p_* = \{t_*, x_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)\}$ системы (1.1) и числу $t^* \in (t_*, \theta]$ в соответствие функцию $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$.

Пусть задано разбиение Δ отрезка $[t_0, \theta]$ точками $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta$ с диаметром разбиения $\delta(\Delta) = \max_i(t_{i+1} - t_i) \le \tau$.

Аппроксимационным обобщенным движением системы (1.1) *из обобщенной начальной позиции* $p_0 = \{t_0, x_0, \nu_0(\cdot)\}$, *отвечающим обобщенной стратегии* U, назовем пару функций $\{x[t]_\Delta, \mu[t]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U]_\Delta, \mu[t]_\Delta\}$, определенных при $t \in [t_0, \theta]$ следующим образом: на каждом полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ функция $\mu[t]_\Delta$ — реализация стратегии U по обобщенной позиции $p_i = \{t_i, x[t_i]_\Delta, \mu_{t_i}[\cdot]_\Delta\}$ и числу t_{i+1}; абсолютно непрерывная функция $x[t]_\Delta$ удовлетворяет при почти всех $t \in [t_i, t_{i+1})$ уравнению

$$\dot{x}[t]_\Delta = \int_P \int_P f_1(t, x[t]_\Delta, u, w)\mu[t]_\Delta(du, dw) + f_2(t, x[t]_\Delta, v[t]),$$

здесь $v[\cdot] \in U([t_i, t_{i+1}), Q)$ — какая-то реализация управления.

Аппроксимационным обобщенным движением системы (1.1) *из обобщенной начальной позиции* $p_0 = \{t_0, x_0, \nu_0(\cdot)\}$, *отвечающим обобщенной стратегии* V, назовем пару функций $\{x[t]_\Delta, \mu[t]\} = \{x[t, p_0, V]_\Delta, \mu[t]\}$, определенных при $t \in [t_0, \theta]$ следующим образом: на каждом полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ абсолютно непрерывная функция $x[t]_\Delta$ удовлетворяет при почти всех t уравнению

$$\dot{x}[t]_\Delta = \int_P \int_P f_1(t, x[t]_\Delta, u, w)\mu[t](du, dw) + f_2(t, x[t]_\Delta, v[t]_\Delta),$$

здесь $v[t]_\Delta$ — реализация стратегии V по обобщенной позиции $p_i = \{t_i, x[t_i]_\Delta, \mu_{t_i}[\cdot]\}$ и числу t_{i+1}, $\mu[\cdot] \in U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^{\tau,0}$ — какая-то реализация обобщенного управления, сопряженного с обобщенной начальной предысторией ν_0.

Обобщенным предельным движением системы (1.1) *из обобщенной начальной позиции* $p_0 = \{t_0, x_0, \nu_0(\cdot)\}$, *отвечающим обобщенной стратегии* U, назовем пару функций $\{x[t], \mu[t]\} = \{x[t, p_0, U], \mu[t]\}$, определенных при $t \in [t_0, \theta]$, таких, что существует последовательность обобщенных аппроксимационных движений $\{x^i[t]_{\Delta_i}, \mu^i[t]_{\Delta_i}\} = \{x[t, \{t_0, x_0^i, \nu_0\}, U]_{\Delta_i}, \mu^i[t]_{\Delta_i}\}$ такая, что $x^i[t]_{\Delta_i}$ сходится к $x[t]$ равномерно на $[t_0, \theta]$, $\mu^i[t]_{\Delta_i}$ сходится к $\mu[t]$ слабо на $[t_0, \theta]$ при условии, что $\delta(\Delta_i) \to 0$, если $i \to \infty$.

Отметим, что множество обобщенных предельных движений не пусто в силу того, что множество функций $x[t, \{t_0, x_0^i, \nu_0(\cdot)\}, U]_{\Delta_i}$ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно, а множество функций $\mu^i[t]_{\Delta_i}$ принадлежит слабо компактному множеству $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^{\tau, \nu_0}$. При этом $x[\cdot] \in C[t_0, \theta]$, $\mu[\cdot] \in U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^{\tau, \nu_0}$.

Аналогично определяется обобщенное предельное движение $\{x[t], \mu[t]\} = \{x[t, p_0, V], \mu[t]\}$ (где $t \in [t_0, \theta]$) системы (1.1) из обобщенной начальной позиции $p_0 = \{t_0, x_0, \nu_0(\cdot)\}$, отвечающее обобщенной стратегии V.

Пусть заданы обобщенная начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_0, \nu_0(\cdot)\}$ и множества $M \subset \rho$ и $N \subset \rho$, которые в дальнейшем будем считать (t, x, μ)-замкнутыми.

Задача 1.1 (сближения с M внутри N). *Требуется построить обобщенную стратегию U такую, что для любого движения $\{x[\cdot], \mu[\cdot]\} = \{x[\cdot, p_0, U], \mu[\cdot]\}$ в некоторый момент $\xi \in [t_0, \theta]$ выполняется*

$$\{x[\xi], \mu_\xi[\cdot]\} \in M_\xi,$$

причем для всех $t \in [t_0, \xi)$

$$\{x[t], \mu_t[\cdot]\} \in N_t.$$

Задача 1.2 (уклонения от M вплоть до выхода из N). *Задано $\varepsilon > 0$. Требуется построить обобщенную стратегию V такую, что для любого движения $\{x[\cdot], \mu[\cdot]\} = \{x[\cdot, p_0, V], \mu[\cdot]\}$ из условия*

$$\{x[\xi], \mu_\xi[\cdot]\} \in M_\xi^\varepsilon$$

следует, что для некоторого момента $t \in [t_0, \xi]$ выполняется

$$\{x[t], \mu_t[\cdot]\} \notin N_t^\varepsilon.$$

2. Условия разрешимости задач сближения и уклонения в классе обобщенных управлений

Укажем условия разрешимости поставленных задач.

Пусть $W \subset \rho$. Будем говорить, что множество W *u-стабильно* относительно M, если, каковы бы ни были позиция $p_* = \{t_*, x_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)\} \in W$, момент $t^* \in (t_*, \theta]$ и управление $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$, найдется такое обобщенное управление $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ $(\nu = \nu^{\mu^*})$, что

$$\{x(t^*, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_{t^*}(\cdot)\} \in W_{t^*},$$

или существует момент $\eta \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$\{x(\eta, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_\eta(\cdot)\} \in M_\eta.$$

Здесь и в дальнейшем $x(t, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)) = x(t)$ — решение уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_P \int_P f_1(t, x(t), u, w)\mu(t)(du, dw) + f_2(t, x(t), v(t))$$

из начальной позиции p_* при выбранных управлениях $\mu(\cdot)$ и $v(\cdot)$.

Лемма 2.1. *Если множество W u-стабильно относительно замкнутого множества M, то его (x, μ)-замыкание $\hat{W}$ также u-стабильно относительно множества M.*

Доказательство. Пусть последовательность позиций $p_i = \{t_*, x_i, \mu^i_{t_i}(\cdot)\}$ из W такова, что $\{x_i\}$ сходится к x_*, $\{\mu^i_{t_i}(\cdot)\}$ слабо сходится к $\{\mu^*_{t_i}(\cdot)\}$. В силу определения u-стабильности по числу t^* и функции $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$ найдутся обобщенные управления $\mu^i(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\{\nu\}}$, что

$$\{x(t^*, p_i, \mu^i(\cdot), v(\cdot)), \mu^i_{t^*}(\cdot)\} \in W_{t^*},$$

или существует момент $\eta^i \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$\{x(\eta^i, p_i, \mu^i(\cdot), v(\cdot)), \mu^i_{\eta^i}(\cdot)\} \in M_\eta.$$

В силу слабой компактности множества $U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\{\nu\}}$ можно выбрать слабо сходящуюся к $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\{\nu\}}$ подпоследовательность (будем обозначать ее также $\mu^i(\cdot)$) и сходящуюся к $\eta \in (t_*, t^*]$ последовательность моментов η^i такие, что

$$\{x(t^*, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_{t^*}\} \in W_{t^*}$$

или

$$\{x(\eta, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_\eta\} \in M_\eta,$$

причем $\mu(\cdot)$ сопряжено с предысторией управления $\mu^*_{t_i}(\cdot)$. (Этот факт следует из теоремы Данфорда–Петтиса [2, с.299].) Это и означает u-стабильность относительно M множества $\hat{W}$.

Будем говорить, что множество W *v-стабильно* относительно N^ε, если, каковы бы ни были позиция $p_* = \{t_*, x_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)\} \in W$, момент $t^* \in (t_*, \theta]$ и обобщенное управление $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ $(\nu = \nu^{\mu^*})$, найдется такое обобщенное управление $\nu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(Q))$, что

$$\{x(t^*, p_*, \mu(\cdot), \nu(\cdot)), \mu_{t^*}(\cdot)\} \in W_{t^*},$$

или существует момент $\eta \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$\{x(\eta, p_*, \mu(\cdot), \nu(\cdot)), \mu_\eta(\cdot)\} \notin N^\varepsilon_\eta.$$

Здесь $x(t, p_*, \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = x(t)$ — решение уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_P \int_P f_1(t, x(t), u, w)\mu(t)(du, dw) + \int_Q f_2(t, x(t), v)\nu(t)(dv)$$

из позиции p_* при выбранных обобщенных управлениях $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$.

Пусть W — x-замкнутое множество в пространстве обобщенных позиций. Назовем *экстремальной к W* обобщенную стратегию V^0, ставящую обобщенной позиции $p_* = \{t_*, x_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)\}$ и числу $t^* \in (t_*, \theta]$ в соответствие функцию $v^0(t)$ по правилу:

а) если $p_* \in W$ или $W_{t_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)} = \emptyset$, то $v^0(t)$ – любая функция из $U([t_*, t^*), Q)$;

б) если $p_* \notin W$, пусть вектор $y \in W_{t_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)}$ — ближайший к x_*, тогда выберем вектор v^0 из условия

$$(y - x_*) f_2(t_*, x_*, v^0) = \max_{v \in Q} (y - x_*) f_2(t_*, x_*, v)$$

и положим $v^0(t) \equiv v^0$.

Пусть W — x-замкнутое u-стабильное множество в пространстве обобщенных позиций. Назовем *экстремальной к W* обобщенную стратегию U^0, ставящую обобщенной позиции $p_* = \{t_*, x_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)\}$ и числу $t^* \in (t_*, \theta]$ в соответствие функцию $\mu^0(t)$ по правилу:

а) если $p_* \in W$ или $W_{t_*, \mu^*_{t_*}(\cdot)} = \emptyset$, то $\mu^0(t)$ — любая функция из $U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\mu^*}$;

б) если $p_* \notin W$, пусть вектор $y \in W_{t_*,\mu^*_{t_*}}$ — ближайший к x_*, тогда выберем вектор v^* из условия

$$(y - x_*)f_2(t_*, x_*, v^*) = \min_{v\in Q}(y - x_*)f_2(t_*, x_*, v),$$

положим $v^*(t) \equiv v^*$ при $t \in [t_*, t^*)$ и находим $\mu^0(t)$ из условия u-стабильности множества W по величинам $p^* = \{t_*, y, \mu^*_{t_*}(\cdot)\} \in W$, t^* и функции $v^*(t)$.

Пусть W — некоторое множество в пространстве обобщенных позиций и $p_* = \{t_*, x_*, \mu_{t_*}(\cdot)\}$ — некоторая обобщенная позиция. Обозначим

$$r(p_*, W) = \begin{cases} \inf_{y\in W_{t_*,\mu_{t_*}(\cdot)}} \|y - x_*\|, \text{ если } W_{t_*,\mu_{t_*}(\cdot)} \neq \emptyset, \\ +\infty, \text{ если } W_{t_*,\mu_{t_*}} = \emptyset. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Пусть x-замкнутое множество W u-стабильно относительно M. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W обобщенная стратегия U^0 обеспечивает условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения $\{x[(\cdot)]_\Delta, \mu^o[(\cdot)]_\Delta\} = \{x[(\cdot), p_0, U^o]_\Delta, \mu^o[(\cdot)]_\Delta\}$, с $\delta(\Delta) \le \delta_0$ в точках разбиения выполняется*

$$r[t_i] = r(p_i, W) = r(\{t_i, x[t_i]_\Delta, \mu^o_{t_i}[\cdot]_\Delta\}, W) \le \varepsilon$$

для всех $t_i \le t_{i_1}$, где t_{i_1} — либо первый из моментов t_i где функция $\mu^o(\cdot) \in U([t_{i_1}, t_{i_1+1}, rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ назначена стратегией U^o из условия

$$\{x(\eta, p_i, \mu^o(\cdot), v(\cdot)), \mu^o_\eta(\cdot)\} \in M_\eta,$$

либо, если такого момента не существует, $t_{i_1} = \theta$.

Доказательство. Покажем, что если для аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu^o[\cdot]_\Delta\}$ и момента $t_i < t_{i_1}$ выполняется $0 < r[t_i]$, то справедлива оценка

$$r^2[t_{i+1}] \le r^2[t_i](1 + C(t_{i+1} - t_i)) + (t_{i+1} - t_i)\varphi(t_{i+1} - t_i). \tag{2.1}$$

Так как, в силу u-стабильности W, выполняется $r[t_{i+1}] \le \|x[t_{i+1}] - z(t_{i+1})\|$, где $z(t) = x(t, \hat{p}_i, \mu^o(\cdot), v^*(\cdot))$, $\hat{p}_i = \{t_i, y, \mu^o_{t_i}(\cdot)\}$, $y \in W_{t_i,\mu^o_{t_i}(\cdot)}$ — ближайший к $x[t_i]_\Delta$, $v^*(\cdot) \equiv v^*$, v^* удовлетворяет условию

$$(y - x[t_i]_\Delta)f_2(t_i, x[t_i]_\Delta, v^*) = \min_{v\in Q}(y - x[t_i]_\Delta)f_2(t_i, x[t_i]\Delta, v),$$

то, в силу предположений о правой части системы (1.1), получаем

$$r^2[t_{i+1}] \le \|x[t_i]_\Delta - y + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_P \int_P f_1(t, x[t]_\Delta, u, w)\mu^o(t)(du, dw)dt -$$

$$- \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_P \int_P f_1(t, z(t), u, w)\mu^o(t)(du, dw)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t, x[t]_\Delta, v[t])dt -$$

$$- \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t, z(t), v^*)dt\|^2 \le r^2[t_i] + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} (y - x[t_i]_\Delta)(f_2(t, x[t]_\Delta, v^*) -$$

$$- f_2(t, x[t]_\Delta, v[t])dt + 2(t_{i+1} - t_i)(L_1 + L_2)r^2[t_i] + (t_{i+1} - t_i)\varphi(t_{i+1} - t_i),$$

где L_1 и L_2 — константы Липшица функций f_1 и f_2 по x для подходящего компакта в $\mathbb{R}^n$; $\varphi(\delta)$ — монотонно убывающая непрерывная функция, стремящаяся к нулю при аргументе, стремящемся к нулю.

В силу выбора вектора v^* получаем оценку (2.1), где $C = 2(L_1 + L_2)$.

Покажем по индукции, что если для некоторого номера i_0 выполняется $r[t_{i_0}] > 0$, то для всех t_i, $i_0 \le i < i_1$, таких, что $r[t_j] > 0$ для $i \le j < i$, выполняется

$$r^2[t_i] \le (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))]e^{(C+1)(t_i - t_{i_0})}. \tag{2.2}$$

База индукции. Утверждение (2.2) при $i = i_0$ выполняется.

Шаг индукции. Пусть (2.2) выполняется для номера i такого, что $r[t_i] > 0$, тогда из (2.1) имеем

$$r^2[t_{i+1}] \le r^2[t_i](1 + C(t_{i+1} - t_i)) + (t_{i+1} - t_i)\varphi(\delta) \le$$

$$\le (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))e^{(C+1)(t_i - t_{i_0})}(1 + C(t_{i+1} - t_i)) + (t_{i+1} - t_i)\varphi(\delta) \le$$

$$\le (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))e^{(C+1)(t_i - t_{i_0})}(1 + C(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1} - t_i)) \le$$

$$\le (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))e^{(C+1)(t_{i+1} - t_{i_0})},$$

т.е. оценка (2.2) доказана для $i + 1$.

Покажем, что из (2.2) вытекает утверждение леммы.

Пусть утверждение леммы неверно, это означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta_0 > 0$, в частности, для $\delta_,$ такого, что

$$\varphi(\delta_0)e^{(C+1)(\theta - t_0)} \le \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.3}$$

найдется аппроксимационное обобщенное движение $\{x[\cdot]_\Delta, \mu^o[\cdot]_\Delta\}$ с $\delta(\Delta) \le \delta_0$ и момент $t_i < t_{i_1}$ такой, что

$$r[t_i] \ge \varepsilon. \tag{2.4}$$

Пусть t_i — наименьший из моментов, где (2.4) выполняется. Будем также предполагать, что δ_0 настолько мало, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения с $\delta(\Delta) \leq \delta_0$, если $r[t_{i-1}] = 0$, то

$$r^2[t_i] < \frac{\varepsilon}{2} e^{-(C+1)(\theta - t_0)}, \tag{2.5}$$

это выполняется в силу свойств системы (1.1).

Пусть $t_{i_0-1} < t_i$ — наибольший из моментов, где выполняется $r[t_{i_0-1}] = 0$, такой момент найдется, в силу условия $p_0 \in W$. Тогда

$$0 < r^2[t_{i_0}] < \frac{\varepsilon}{2} e^{-(C+1)(\theta - t_0)},$$

в силу (2.5).

Из этой оценки, а также из (2.2), (2.3) получаем

$$r^2[t_i] \leq (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))] e^{(C+1)(t_i - t_{i_0})} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что противоречит (2.4). Утверждение леммы доказано.

Отметим, что схема доказательства этой леммы, а также последующих утверждений, составляющих теорему об альтернативе, аналогичны конструкциям Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [3].

Лемма 2.3. *Пусть (x, μ)-замкнутое множество W u-стабильно относительно M. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W обобщенная стратегия U^0 для всякого обобщенного движения $\{x^o[\cdot], \mu^o[\cdot]\} = \{x[\cdot, p_0, U^o], \mu^o[\cdot]\}$ обеспечивает условие*

$$\{x^o[t], \mu^o_t[\cdot]\} \in W_t, \ t \leq t_* \leq \theta,$$

для всех моментов t_* таких, что

$$\{x^o[t_*], \mu^o_{t_*}(\cdot)\} \in M_{t_*},$$

если такого момента не существует, то $t_* = \theta$.

Утверждение этой леммы вытекает из утверждения предыдущей леммы и определения обобщенного движения $\{x[\cdot, p_0, U^o], \mu^o[\cdot]\}$.

Из леммы 2.3 следует

Теорема 2.1. *Пусть (x, μ)-замкнутое множество W u-стабильно относительно M, $W \subset N$ и $W_\theta \subset M_\theta$. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W обобщенная стратегия U^0 разрешает задачу* 1.1.

Лемма 2.4. *Пусть x-замкнутое множество W, v-стабильно относительно N^γ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W обобщенная стратегия V^o обеспечивает условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu[\cdot]\} = \{x[\cdot, p_0, V^o]_\Delta, \mu[\cdot]\}$, с $\delta(\Delta) \leq \delta_0$ в точках разбиения выполняется*

$$r[t_i] = r(p_i, W) = r(\{t_i, x[t_i]_\Delta, \mu_{t_i}[\cdot]\}, W) \leq \varepsilon$$

для всех $t_i \leq t_{i_1}$, где t_{i_1} либо первый момент t_i, в котором функция $v^o(\cdot) \in U([t_{i_1}, t_{i_1+1}, Q)$ назначена стратегией V^o из условия

$$\{x(\eta, p_i, \mu[\cdot], v^o(\cdot)), \mu_\eta[\cdot]\} \in N^\gamma_\eta,$$

либо, если такого момента не существует, $t_{i_1} = \theta$.

Доказательство. Покажем, что если для аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu[\cdot]\}$ и момента $t_i < t_{i_1}$ выполняется $0 < r[t_i]$, то справедлива оценка

$$r^2[t_{i+1}] \leq r^2[t_i](1 + C(t_{i+1} - t_i)) + (t_{i+1} - t_i)\varphi(t_{i+1} - t_i). \tag{2.6}$$

Так как выполняется $r[t_{i+1}] \leq \|x[t_{i+1}] - z(t_{i+1})\|$, где $z(t) = x(t, \hat{p}_i, \mu[\cdot], \nu(\cdot))$, $\hat{p}_i = \{t_i, y, \mu_{t_i}[\cdot]\}$, $y \in W_{t_i, \mu_{t_i}(\cdot)}$ — ближайший к $x[t_i]_\Delta$, $v^o(\cdot) \equiv v^o$, v^o удовлетворяет условию

$$(y - x[t_i]_\Delta) f_2(t_i, x[t_i]_\Delta, v^o) = \max_{v \in Q} (y - x[t_i]_\Delta) f_2(t_i, x[t_i]\Delta, v),$$

функция (обобщенное управление) $\nu(\cdot) \in U([t_i, t_{i+1}), rpm(Q)$ выбрана из условия v-стабильности W по p_i, t_{i+1} и $\mu(\cdot) \in U([t_i, t_{i+1}), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$, $(\nu = \nu^\mu)$, то, в силу предположений о правой части системы (1.1), получаем

$$\begin{gathered}
r^2[t_{i+1}] \leq \|x[t_i]_\Delta - y + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_P \int_P f_1(t, x[t]_\Delta, u, w)\mu[t](du, dw)dt - \\
- \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_P \int_P f_1(t, z(t), u, w)\mu[t](du, dw)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t, x[t]_\Delta, v^o)dt - \\
- \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_Q f_2(t, z(t), v)\nu(t)(dv)dt\|^2 \leq r^2[t_i] + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_Q (y - x[t_i]_\Delta)(f_2(t, x[t]_\Delta, v) - \\
- f_2(t, x[t]_\Delta, v^o)\nu(t)(dv)dt + 2(t_{i+1} - t_i)(L_1 + L_2)r^2[t_i] + (t_{i+1} - t_i)\varphi(t_{i+1} - t_i),
\end{gathered}$$

где L_1 и L_2 — константы Липшица функций f_1 и f_2 по x; $\varphi(\delta)$ — монотонно убывающая непрерывная функция, стремящаяся к нулю при аргументе, стремящемся к нулю.

В силу выбора вектора v^o получаем оценку (2.6), где $C = 2(L_1 + L_2)$.

Из этой оценки, аналогично тому, как в доказательстве леммы 2.2, показывается по индукции, что если для некоторого номера i_0 выполняется $r[t_{i_0}] > 0$, то для всех t_i, $i_0 \le i < i_1$ таких, что $r[t_j] > 0$ для $i \le j < i$, выполняется

$$r^2[t_i] \le (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))]e^{(C+1)(t_i - t_{i_0})}. \tag{2.7}$$

Покажем, что из (2.7) вытекает утверждение леммы.

Пусть утверждение леммы неверно, это означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta_0 > 0$, в частности, для δ_0 такого, что

$$\varphi(\delta_0)e^{(C+1)(\theta - t_0)} \le \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.8}$$

найдется аппроксимационное обобщенное движение $\{x[\cdot]_\Delta, \mu[\cdot]\}$ с $\delta(\Delta) \le \delta_0$ и момент $t_i < t_{i_1}$ такой, что

$$r[t_i] \ge \varepsilon. \tag{2.9}$$

Пусть t_i – наименьший из моментов, где (2.9) выполняется. Будем также предполагать, что δ_0 настолько мало, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения с $\delta(\Delta) \le \delta_0$, если $r[t_{i-1}] = 0$, то

$$r^2[t_i] < \frac{\varepsilon}{2}e^{-(C+1)(\theta - t_0)}, \tag{2.10}$$

это выполняется, в силу свойств системы (1.1).

Пусть $t_{i_0-1} < t_i$ — наибольший из моментов, где выполняется $r[t_{i_0-1}] = 0$, такой момент найдется, в силу условия $p_0 \in W$. Тогда

$$0 < r^2[t_{i_0}] < \frac{\varepsilon}{2}e^{-(C+1)(\theta - t_0)},$$

в силу (2.10).

Из этой оценки, а также из (2.7), (2.8) получаем

$$r^2[t_i] \le (r^2[t_{i_0}] + \varphi(\delta))]e^{(C+1)(t_i - t_{i_0})} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что противоречит (2.9). Утверждение леммы доказано.

Из этой леммы вытекает

Теорема 2.2. *Пусть (x,μ)-замкнутое множество W v-стабильно относительно N^ε и $W \cap M^\varepsilon = \emptyset$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W обобщенная стратегия V^0 разрешает задачу* 1.2.

Лемма 2.5. *Пусть x-замкнутое множество W u-стабильно относительно M, $W \subset N$ и $W_\theta \subset M_\theta$. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W обобщенная стратегия U^0 обеспечивает условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_0 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu^o[\cdot]_\Delta\} = \{x[\cdot, \hat{p}_0, U^o]_\Delta, \mu^o[\cdot]_\Delta\}$, с $\delta(\Delta) \le \delta_0$ и начальной позицией $\hat{p}_0 = \{t_0, \hat{x}_0, \nu_0(\cdot)\}$ такой, что $\|\hat{x}_0 - x_0\| \le \alpha$, в некоторый момент $\xi \in [t_0, \theta]$ выполняется*

$$\{x[\xi]_\Delta, \mu^o_\xi[\cdot]\} \in M^\varepsilon_\xi,$$

причем для всех $t \in [t_0, \xi)$

$$\{x[t]_\Delta, \mu^o_t[\cdot]\} \in N^\varepsilon_t.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.2.

Обозначим через $K(M, N, \varepsilon_o)$ дополнение до множества ρ множества всех тех обобщенные позиции p_*, для каждой из которых, как из начальной, разрешима задача сближения по крайней мере с одним множеством $[M^{\varepsilon_*}]$ внутри $[N^{\varepsilon_*}]$, где $0 < \varepsilon_* < \varepsilon_o$.

Лемма 2.6. *Для всякого $\varepsilon_o > 0$ множество $K = K(M, N, \varepsilon_o)$ является v-стабильным относительно N^{ε_o} и $K \cap M^{\varepsilon_o} = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть K не является v-стабильным относительно N^{ε_o}. Тогда найдутся обобщенная позиция $p_* = \{t_*, x_*, \mu_{t_*}(\cdot)\} \in K$, число $t^* \in (t_*, \theta]$ и обобщенное управление $\mu^*(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ такие, что множество $X(t) = \{x = x(t, p_*, \mu^*(\cdot), v(\cdot)) : \ v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)\}$ содержится внутри $N^{\varepsilon_o}_{t,\mu_t(\cdot)}$ при всех $t \in [t_*, t^*]$, а множество $X = \{x = x(t^*, p_*, \mu^*(\cdot), v(\cdot)) : v(\cdot) \in U([t_*, t^*)\}$ не пересекается с $K_{t^*,\mu_{t_*}(\cdot)}$. Отметим, что, в силу определения v-стабильности, множество X замкнуто и поэтому является компактом.

Возьмем произвольный вектор $x_i \in X$. Для обобщенной позиции $p_i = \{t^*, x_i, \mu^*_{t^*}(\cdot)\}$ найдется число ε_i, $0 < \varepsilon_i < \varepsilon_o$, и обобщенная стратегия U^i, разрешающая для p_i задачу сближения с $[M^{\varepsilon_i}]$ внутри $[N^{\varepsilon_i}]$. Выберем число ε^*_i так, что $\varepsilon_i < \varepsilon^*_i < \varepsilon_o$. Тогда найдется число $\delta^*_i > 0$ такое, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu^i[\cdot]_\Delta\} = \{x[\cdot, p_i, U^i]_\Delta, \mu^i[\cdot]_\Delta\}$, с $\delta(\Delta) \le \delta^*_i$ для некоторого момента $\eta \in [t^*, \theta]$ выполняется

$$x[\eta]_\Delta \in M^{\varepsilon^*_i}_{\eta,\mu^i_\eta(\cdot)}, \tag{2.11}$$

причем

$$x[t]_\Delta \in N^{\varepsilon^*_i}_{t,\mu^i_t(\cdot)}, \ t \in [t^*, \eta].$$

Вдоль таких аппроксимационных обобщенных движений составим обобщенные позиции $\{t, x, \mu_t(\cdot)\}$, $t \ge t^*, x = x[t]_\Delta, \mu_t(\cdot) = \mu^i_t(\cdot)$, вплоть до моментов η, где выполняется (2.11). Обозначим это множество через W^i. По построению W^i является u-стабильным относительно $M^{\varepsilon_i^*}$, $W^i \subset N^{\varepsilon_i^*}$ и $W^i_\theta \subset M_\theta^{\varepsilon_i^*}$.

В силу леммы 2.5 экстремальная к $[W^i]$ обобщенная стратегия $U^{o,i}$ обладает свойством: по числу ε_i^{**} такому, что $\varepsilon_i^* < \varepsilon_i^{**} < \varepsilon_o$, найдутся числа $\delta_i^{**} > 0$ и $\alpha_i > 0$ такие, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu^{o,i}[\cdot]_\Delta\} = \{x[\cdot, \hat{p}_i, U^{o,i}]_\Delta, \mu^{o,i}[\cdot]_\Delta\}$, с $\delta(\Delta) \le \delta_i^{**}$ и начальной позицией $\hat{p}_i = \{t^*, \hat{x}_i, \mu_{t^*}(\cdot)\}$ такой, что

$$\|\hat{x}_i - x_i\| \le \alpha_i, \tag{2.12}$$

в некоторый момент $\xi \in [t^*, \theta]$ выполняется

$$\{x[\xi]_\Delta, \mu_\xi^{o,i}[\cdot]\} \in M_\xi^{\varepsilon_i^{**}}, \tag{2.13}$$

причем для всех $t \in [t^*, \xi)$

$$\{x[t]_\Delta, \mu_t^{o,i}[\cdot]\} \in N_t^{\varepsilon_i^{**}}.$$

Вдоль таких аппроксимационных обобщенных движений составим обобщенные позиции $\{t, x, \mu_t(\cdot)\}$, $t \ge t^*, x = x[t]_\Delta, \mu_t = \mu_t^{o,i}$, вплоть до моментов ξ, где выполняется (2.13). Обозначим это множество через $W^{*,i}$. По построению $W^{*,i}$ является u-стабильным относительно $M^{\varepsilon_i^{**}}$, $W^{*,i} \subset N^{\varepsilon_i^{**}}$ и $W_\theta^{*,i} \subset M_\theta^{\varepsilon_i^{**}}$.

Покроем X системой окрестностей вида (2.12) и выберем конечное подпокрытие $i = 1, ..., m$. Пусть $\varepsilon = \max_i\{\varepsilon_i^{**}\}$, тогда $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$. Составим множество W обобщенных позиций $p = \{t, x, \mu_t(\cdot)\}$, $t \ge t_*$, где

а) при $t \in [t_*, t^*] : x = x(t, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot))$, $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$, $\mu_t(\cdot) = \mu_t^*(\cdot)$;

б) при $t \in (t^*, \theta] : W = \cup_{i=1,\dots,m} W^{*,i}$.

Множество W является u-стабильным относительно M^ε, $[W]$ содержится в $[N^\varepsilon]$ и $[W_\theta] \subset [M_\theta^\varepsilon]$. Так как $p_* \in W$, то экстремальная к $[W]$ обобщенная стратегия U^o, в силу теоремы 2.1, разрешает задачу сближения с $[M^\varepsilon]$ внутри $[N^\varepsilon]$, а так как $\varepsilon < \varepsilon_o$, то это противоречит тому, что $p_* \in K$.

Из леммы 2.6 и теоремы 2.2 вытекает

Теорема 2.3. *Для любой обобщенной позиции p_0 и любой пары замкнутых множеств M и N либо для любого $\varepsilon > 0$ разрешима задача сближения с $[M^\varepsilon]$ внутри $[N^\varepsilon]$, либо разрешима задача уклонения от M вплоть до выхода из N.*

Цель дальнейших рассуждений — доказать усиление теоремы 2.3 — теорему об альтернативе в дифференциальной игре, складывающейся из задач 1.1 и 1.2.

Лемма 2.7. *Пусть для обобщенной позиции* p_0 *неразрешима задача уклонения от* M *вплоть до выхода из* N*. Тогда существует последовательность* (x,μ)*-замкнутых множеств* $W^{(i)}$ *такая, что для всех натуральных* i *выполняется* $p_0 \in W^{(i)}$, $W^{(i+1)} \subset W^{(i)}$, $W^{(i)}$ *u-стабильно относительно* $[M^{\varepsilon_i}]$, $W_\theta^{(i)} \subset [M_\theta^{\varepsilon_i}]$, $W^{(i)} \subset [N^{\varepsilon_i}]$, ε_i *монотонно стремится к нулю при росте* i.

Доказательство. Пусть для p_0 неразрешима задача уклонения от M вплоть до выхода из N. Тогда по теореме 2.3 для всякого достаточно малого положительного числа $\varepsilon/3$ разрешима задача сближения с $[M^{\varepsilon/3}]$ внутри $[N^{\varepsilon/3}]$. Это означает, что найдется обобщенная стратегия U такая, что по числу $\varepsilon/3$ найдется число $\delta_0 > 0$, такое, что для всякого аппроксимационного обобщенного движения $\{x[\cdot]_\Delta, \mu[\cdot]_\Delta\} = \{x[\cdot, p_0, U]_\Delta, \mu[\cdot]_\Delta\}$, с $\delta(\Delta) \le \delta_0$ в некоторый момент $\xi \in [t_0, \theta]$ выполняется

$$\{x[\xi]_\Delta, \mu_\xi(\cdot)\} \in [M_\xi^{\frac{2\varepsilon}{3}}],$$

причем для всех $t \in [t_0, \xi]$

$$\{x[t]_\Delta, \mu_t(\cdot)\} \in [N_t^{\frac{2\varepsilon}{3}}].$$

Вдоль таких аппроксимационных обобщенных движений составим множество $W(\varepsilon, U)$ обобщенных позиций $\{t, x, \mu_t(\cdot)\}$, $t \in [t_0, \xi]$, $x = x[t]_\Delta$, $\mu_t(\cdot) = \mu_t[\cdot]_\Delta$. Множество $W(\varepsilon, U)$ u-стабильно относительно $[M^{(2\varepsilon)/3}]$, $W(\varepsilon)_\theta \subset [M_\theta^{(2\varepsilon)/3}]$, $W(\varepsilon) \subset [N^{(2\varepsilon)/3}]$. Но тогда и множество

$$W(\varepsilon) = \cup_U W(\varepsilon, U),$$

где объединение берется по всем стратегиям, разрешающим для p_0 задачу сближения с $[M^{\varepsilon/3}]$ внутри $[N^{\varepsilon/3}]$, обладает этими свойствами.

Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда соответствующая последовательность (x,μ)-замыканий множеств $W(\varepsilon)$ обладает указанными в формулировке леммы свойствами.

Лемма 2.8. *Пусть последовательность* (x,μ)*-замкнутых множеств* $W^{(i)}$ *такова, что для всех натуральных* i *выполняется* $W^{(i+1)} \subset W^{(i)}$, $W^{(i)}$ *u-стабильно относительно* $[M^{\varepsilon_i}]$, ε_i *монотонно стремится к нулю при росте* i*. Обозначим*

$$W = \cap_i W^{(i)}.$$

Тогда множество W *является u-стабильным относительно* M.

Доказательство. Предположим противное, т.е. найдутся обобщенная позиция $p_* \in W = \cap_i W^{(i)}$, число $t^* \in (t_*, \theta]$ и функция $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$ такие, что для любого обобщенного управления $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*),\ rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ выполняется

$$\{x(t^*, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_{t^*}(\cdot)\} \notin W_{t^*}, \tag{2.14}$$

и $\eta \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$\{x(\eta, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_\eta(\cdot)\} \notin M_\eta \tag{2.15}$$

для всех $\eta \in [t_*, t^*]$.

Возьмем натуральное i. Обозначим через $U(i)$ множество обобщенных управлений $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ таких, что выполняется

$$\{x(t^*, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_{t^*}(\cdot)\} \in W^{(i)}_{t^*},$$

а через $\hat{U}(i)$ множество обобщенных управлений $\mu(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ таких, что найдется момент $\xi \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$\{x(\xi, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_\xi(\cdot)\} \in [M^{\varepsilon_i}_\xi].$$

В силу u-стабильности множеств $W^{(i)}$ при любом i множества $U(i)$ и $\hat{U}(i)$ одновременно не пусты. Имеются две возможности:

1) при всяком i множество $U(i)$ не пусто;

2) найдется номер i_o, начиная с которого $U(i)$ пусто, тогда $\hat{U}(i)$ не пусто при любом i.

Рассмотрим первую возможность. Заметим, что при всяком i множества $U(i)$ слабо замкнуты и выполняется $U(i+1) \subset U(i)$. В силу компактности множества $U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ в слабой топологии, центрированная система $\{U(i)\}$ его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение, т.е. найдется обобщенное управление $\mu^*(\cdot) \in U([t_*, t^*), rpm(P \times P))^{\tau,\nu}$ такое, что

$$\{x(t^*, p_*, \mu^*(\cdot), v(\cdot)), \mu_{t^*}(\cdot)\} \in W^{(i)}_{t^*}$$

для любого i. Это означает

$$\{x(t^*, p_*, \mu^*(\cdot), v(\cdot)), \mu_{t^*}(\cdot)\} \in W_{t^*},$$

что противоречит (2.14).

Рассмотрим вторую возможность. Как и в первом случае, устанавливается существование обобщенного управления $\mu^*(\cdot)$, принадлежащего пересечению множеств $\hat{U}(i)$. Это означает существование последовательности чисел $\xi_i \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$\{x(\xi_i, p_*, \mu^*(\cdot), v(\cdot)), \mu_\xi(\cdot)\} \in [M^{\varepsilon_i}_{\xi_i}].$$

Из последовательности ξ_i можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому числу $\eta \in [t_*, t^*]$. Тогда, в силу (t, x, μ)-замкнутости множества M, имеем

$$\{x(\eta, p_*, \mu(\cdot), v(\cdot)), \mu_\eta(\cdot)\} \notin M_\eta,$$

что противоречит (2.15).

Из лемм 2.7, 2.8 и теоремы 2.1 следует теорема об альтернативе.

Теорема 2.4. *Для любой обобщенной позиции* p_0 *и любой пары замкнутых множеств* M *и* N *либо разрешима задача* 1.1 *сближения с* M *внутри* N, *либо разрешима задача* 1.2 *уклонения от* M *вплоть до выхода из* N.

3. Задача сближения–уклонения в классе обычных управлений с последействием

В этом разделе будем рассматривать только обычные управления $u(\cdot) \in U([t_0, \theta], P)$, т.е. измеримые на $[t_0, \theta]$ функции со значениями в P, и соответственно обычные предыстории управления $u_t(\cdot) \in U([-\tau, 0), P) = \Pi_o$ к моменту t. Всякую тройку $\{t, x, u_t(\cdot)\}$, где $t \in [t_0, \theta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u_t(\cdot) \in \Pi_o$, будем называть *позицией*. Множество всех позиций будем обозначать ρ_0.

Стратегией U назовем отображение, ставящее позиции $p_* = \{t_*, x_*, u^*_{t_*}(\cdot)\}$ системы (1.1) и числу $t^* \in (t_*, \theta]$ в соответствие функцию $u(\cdot) \in U([t_*, t^*), P)$. *Стратегией* V назовем отображение, ставящее позиции $p_* = \{t_*, x_*, u^*_{t_*}(\cdot)\}$ системы (1.1) и числу $t^* \in (t_*, \theta]$ в соответствие функцию $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$.

Пусть задано разбиение Δ отрезка $[t_0, \theta]$ точками $t_0 < t_1 < ... < t_N = \theta$ с диаметром разбиения $\delta(\Delta) = \max_i(t_{i+1} - t_i) \le \tau$.

Движением (*аппроксимационным*) *системы* (1.1) *из начальной позиции* $p_0 = \{t_0, x_0, u_0(\cdot)\}$, *отвечающим стратегии* U, назовем пару функций $\{x[t]_\Delta, u[t]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U]_\Delta, u[t]_\Delta\}$, определенных при $t \in [t_0, \theta]$ следующим образом: на каждом полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ функция $u[t]_\Delta$ — реализация стратегии U по позиции $p_i = \{t_i, x[t_i]_\Delta, u_{t_i}[\cdot]_\Delta\}$ и числу t_{i+1}; абсолютно непрерывная функция $x[t]_\Delta$ удовлетворяет при почти всех $t \in [t_i, t_{i+1})$ уравнению

$$\dot{x}[t]_\Delta = f_1(t, x[t]_\Delta, u[t]_\Delta, u[t-\tau]_\Delta) + f_2(t, x[t]_\Delta, v[t]),$$

здесь $v[\cdot] \in U([t_i, t_{i+1}), Q)$ — какая-то реализация управления.

Движением (*аппроксимационным*) *системы* (1.1) *из начальной позиции* $p_0 = \{t_0, x_0, u_0\}$, *отвечающим стратегии* V, назовем пару функций $\{x[t]_\Delta, u[t]\} = \{x[t, p_0, V]_\Delta, u[t]\}$, определенных при $t \in [t_0, \theta]$ следующим образом: на каждом полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ абсолютно непрерывная функция $x[t]_\Delta$ удовлетворяет при почти всех t уравнению

$$\dot{x}[t]_\Delta = f_1(t, x[t]_\Delta, u[t], u[t-\tau]) + f_2(t, x[t]_\Delta, v[t]_\Delta),$$

здесь $v[t]_\Delta$ — реализация стратегии V по позиции $p_i = \{t_i, x[t_i]_\Delta, u_{t_i}[\cdot]\}$ и числу t_{i+1}, $u[\cdot] \in U([t_i, t_{i+1}, P)$ — какая-то реализация управления.

Пусть $[A]$ — замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и A^ε — открытая ε-окрестность A. Через M_t и $M_{t,u(\cdot)}$ обозначим сечения множества $M \subset \rho_0$ соответственно по t и по паре $\{t, u(\cdot)\}$. Через $[M]$ и M^ε обозначим совокупность позиций $\{t, x, u(\cdot)\}$ таких, что $x \in [M_{t,u(\cdot)}]$ и $x \in M^\varepsilon_{t,u(\cdot)}$.

Пусть заданы начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_0, u_0(\cdot)\}$ и множества $M \subset \rho_0$ и $N \subset \rho_0$.

Задача 3.1 (сближения с M внутри N). *Требуется построить стратегию U^0 со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого движения $\{x[\cdot]_\Delta, u^0[\cdot]_\Delta\} = \{x[\cdot, p_0, U^0]_\Delta, u^0[\cdot]_\Delta\}$ с диаметром разбиения $\delta(\Delta) \le \delta_0$ в некоторый момент $\xi \in [t_0, \theta]$ выполняется*

$$x[\xi]_\Delta \in M^\varepsilon_{\xi, u^0_\xi[\cdot]_\Delta}, \tag{3.1}$$

причем для всех $t \in [t_0, \xi)$

$$x[t]_\Delta \in N^\varepsilon_{t, u^0_t[\cdot]_\Delta}. \tag{3.2}$$

Задача 3.2 (уклонения от M вплоть до выхода из N). *Требуется построить стратегию V^0 со свойством: найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для всякого движения $\{x[\cdot]_\Delta, u[\cdot]_\Delta\} = \{x[\cdot, p_0, V^0]_\Delta, u[\cdot]_\Delta\}$ с диаметром разбиения $\delta(\Delta) \le \delta_0$ из условия*

$$x[\xi]_\Delta \in M^\varepsilon_{\xi, u_\xi[\cdot]}$$

следует, что для некоторого момента $t \in [t_0, \xi]$ выполняется

$$x[t]_\Delta \notin N^\varepsilon_{t, u_t[\cdot]}.$$

Укажем условия разрешимости поставленных задач.

Пусть $W \subset \rho_0$. Будем говорить, что множество W (γ, u)-*стабильно* относительно M, если, каковы бы ни были позиция $p_* = \{t_*, x_*, u_{t_*}(\cdot)\} \in W$, момент $t^* \in (t_*, \theta]$, управление $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$ и число $\gamma > 0$, найдется такое управление $u(\cdot) \in U([t_*, t^*), P)$, что

$$x(t^*, p_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in W^\gamma_{t^*, u_{t^*}(\cdot)},$$

или существует момент $\eta \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$x(\eta, p_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in M^{\gamma}_{\eta, u_\eta(\cdot)}. \qquad (3.3)$$

Здесь $x(t, p_*, u(\cdot), v(\cdot)) = x(t)$ — решение уравнения (1.1) из начальной позиции p_* при выбранных управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$.

Будем говорить, что множество W (γ, v)-*стабильно* относительно N^ε, если, каковы бы ни были позиция $p_* = \{t_*, x_*, u^*_{t_*}(\cdot)\} \in W$, момент $t^* \in (t_*, \theta]$, управление $u(\cdot) \in U([t_*, t^*), P)$ и число $\gamma > 0$, найдется такое управление $v(\cdot) \in U([t_*, t^*), Q)$, что

$$x(t^*, p_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in W^{\gamma}_{t^*, u_{t^*}(\cdot)},$$

или существует момент $\eta \in [t_*, t^*]$ такой, что

$$x(\eta, p_*, u(\cdot), v(\cdot)) \notin N^{\gamma}_{\eta, u_\eta(\cdot)}.$$

Теорема 3.1. *Пусть множество W (γ, u)-стабильно относительно M, $W \in N$ и $W_\theta \subset [M_\theta]$. Тогда, если $p_0 \in W$, то экстремальная к W стратегия U^0* [6] *разрешает задачу* 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть множество W (γ, v)-стабильно относительно N^ε и $W \cap M^\varepsilon = \emptyset$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда если $p_0 \in W$, то экстремальная к W [6] стратегия V^0 разрешает задачу* 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть дана последовательность множеств $W^{(i)}$ такая, что для всех натуральных i выполняется $p_0 \in W^{(i)}$, и кроме того,*

1) $W^{(i+1)} \subset W^{(i)}$,

2) $W^{(i)}$ *(γ, u)-стабильно относительно M^{ε_i},*

3) $W^{(i)}_\theta \subset [M^{\varepsilon_i}_\theta]$,

4) $W^{(i)} \subset N^{\varepsilon_i}$, *$\varepsilon_i$ монотонно стремится к нулю при росте i.*

Тогда экстремальная к последовательности множеств $W^{(i)}$ стратегия U^{oo} [6] *разрешает задачу* 3.1.

Теорема 3.4. *Для любой позиции p_0 и любой пары множеств M и N либо разрешима задача* 3.1 *сближения с M внутри N, либо разрешима задача* 3.2 *уклонения от M вплоть до выхода из N. В случае если разрешима задача* 3.1, *то ее разрешает стратегия U^{00}, экстремальная к последовательности множеств $W^{(i)}$ с перечисленными в теореме* 3.3 *свойствами; в случае, если разрешима задача* 3.2, *то ее разрешает стратегия V^o, экстремальная к множеству W с указанными в теореме* 3.2 *свойствами.*

Доказательства этих теорем приведены в работе [6] в случае отсутствия ограничений, т.е. $N = \rho_0$, и проводятся по схемам аналогичных утверждений предыдущего раздела.

Установим связь между разрешимостью задач 1.1–1.2 и задач 3.1–3.2.

Всякое управление $u(t) \in U([t_*, t^*], P)$ можно отождествить с сосредоточенным обобщенным управлением $\mu(t) = \delta(u(t) \times u(t-\tau)) \in U([t_*, t^*], rpm(P \times P))^\tau$ [8], поэтому множество обычных позиций ρ_0 вкладывается во множество обобщенных позиций ρ и заданную начальную позицию $p_0 = \{t_0, x_0, u_{t_0}(s)\}$ будем отождествлять с обобщенной начальной позицией $p_0 = \{t_0, x_0, \delta(\nu_{t_0}(s))\} \in \rho$.

Будем предполагать, что целевое множество M и ограничивающее множество N, фигурирующие в задачах 3.1 и 3.2, удовлетворяют следующему условию.

Условие 3.1 *Множества M и N замкнуты в пространстве ρ ((в смысле (t, x, μ)-замыкания).*

Такому условию удовлетворяют, например, нефункциональные множества, сечения которых замкнуты в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 3.5. *Пусть заданы $p_0 \in \rho_0$, $M \subset \rho_0$, $N \subset \rho_0$и выполняется условие* 3.1. *Тогда задача* 3.2 *разрешима, если и только если разрешима задача* 1.2.

Доказательство. Пусть разрешима задача 1.2, которую разрешает обобщенная стратегия V^o. Всякая обобщенная стратегия V задает обычную стратегию V (см. определения). Множество аппроксимационных движений $\{x[\cdot, p_0, V^o]_\Delta, u[\cdot]\}$ содержится во множестве обобщенных аппроксимационных движений $\{x[\cdot, p_0, V^o]_\Delta, \mu[\cdot]\}$, поэтому стратегия V^0 разрешает задачу 3.2.

Пусть разрешима задача 3.2. Тогда существует множество $W \subset \rho_0$ со свойствами: множество W (γ, v)-стабильно относительно N^ε $W \cap M^\varepsilon = \emptyset$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $p_0 \in W$. Такое множество можно построить, например, вдоль аппроксимационных движений $\{x[t, p_0, V^o]_\Delta, u[t]\}$, где V^o — разрешающая задачу 3.2 стратегия. Пусть $\hat{W}$ — (x, μ)-замыкание множества W в пространстве обобщенных позиций. Проверяется по определению, что множество $\hat{W}$ является v-стабильным относительно N^ε и $W \cap M^\varepsilon = \emptyset$. Тогда экстремальная к W обобщенная стратегия разрешает задачу 1.2.

Из этой теоремы и теорем об альтернативе 2.4 и 3.4 вытекает

Следствие. *При выполнении условия* 3.1 *задача* 3.1 *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача* 1.1 *и, таким образом, указанные задачи эквивалентны.*

Литература

1. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Мир, 1977.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т.196, №4. С.779–782.
5. Осипов Ю. С., Пименов В. Г. К теории дифференциальных игр в системах с последействием // Прикл. математика и механика. 1978. Т.42, №6. С.963–977.
6. Осипов Ю. С., Пименов В. Г. О позиционном управлении при последействии в управляющих силах // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45, №2. С.223–229.
7. Пименов В. Г. О существовании обобщенных оптимальных управлений в системах с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, №8. С.2174–2176.
8. Пименов В. Г. Концепция обобщенных управлений для дифференциально-функциональных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31, №6. С.980–989.
9. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 12.09.2000 г.;
окончательный вариант 02.11.2000 г.